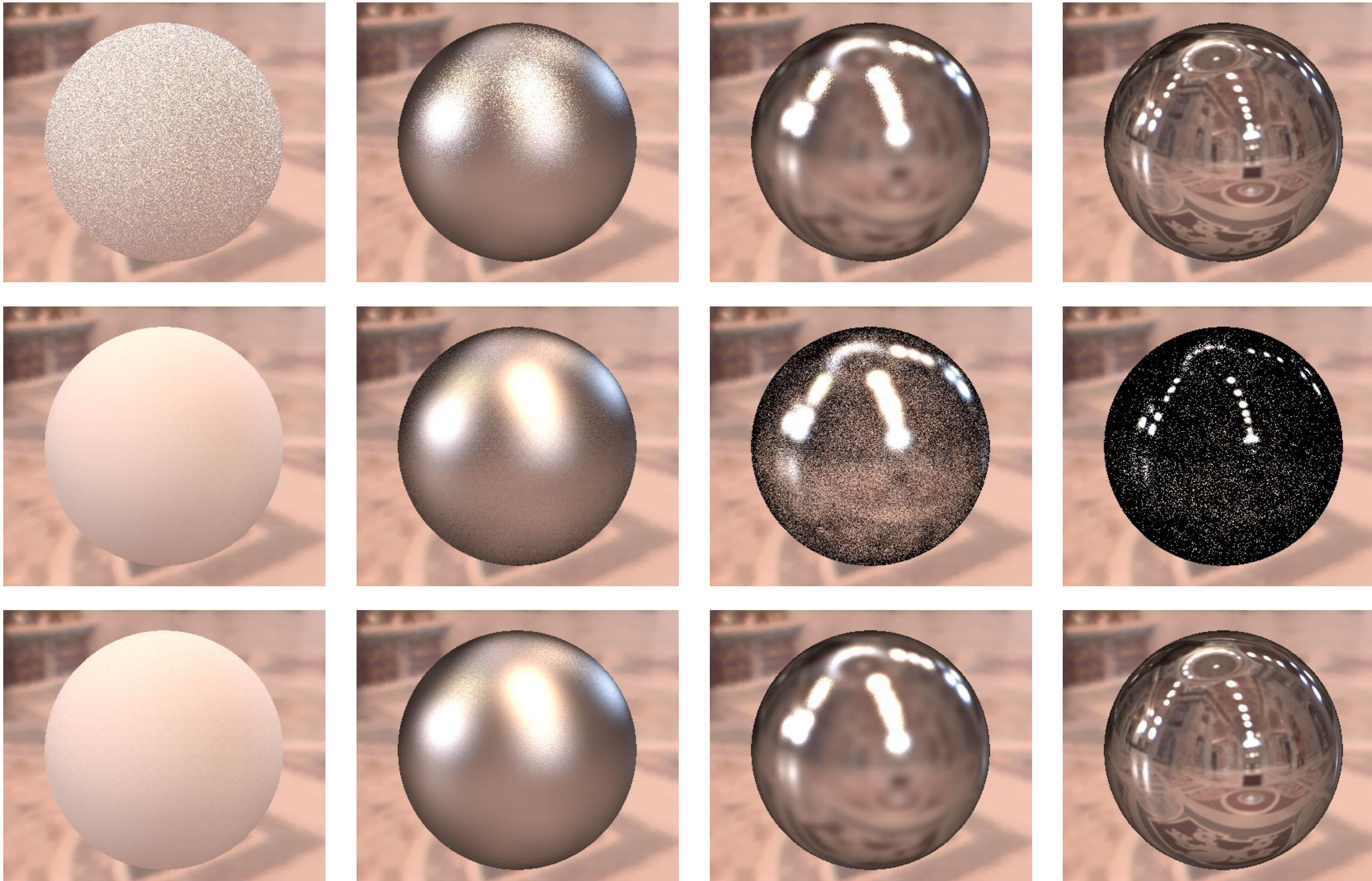
Počítačová grafika III – Multiple Importance Sampling

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Sampling strategies



BRDF IS 600 samples

EM IS 600 samples

MIS 300 + 300 samples

Diffuse only

Ward BRDF, α=0.2

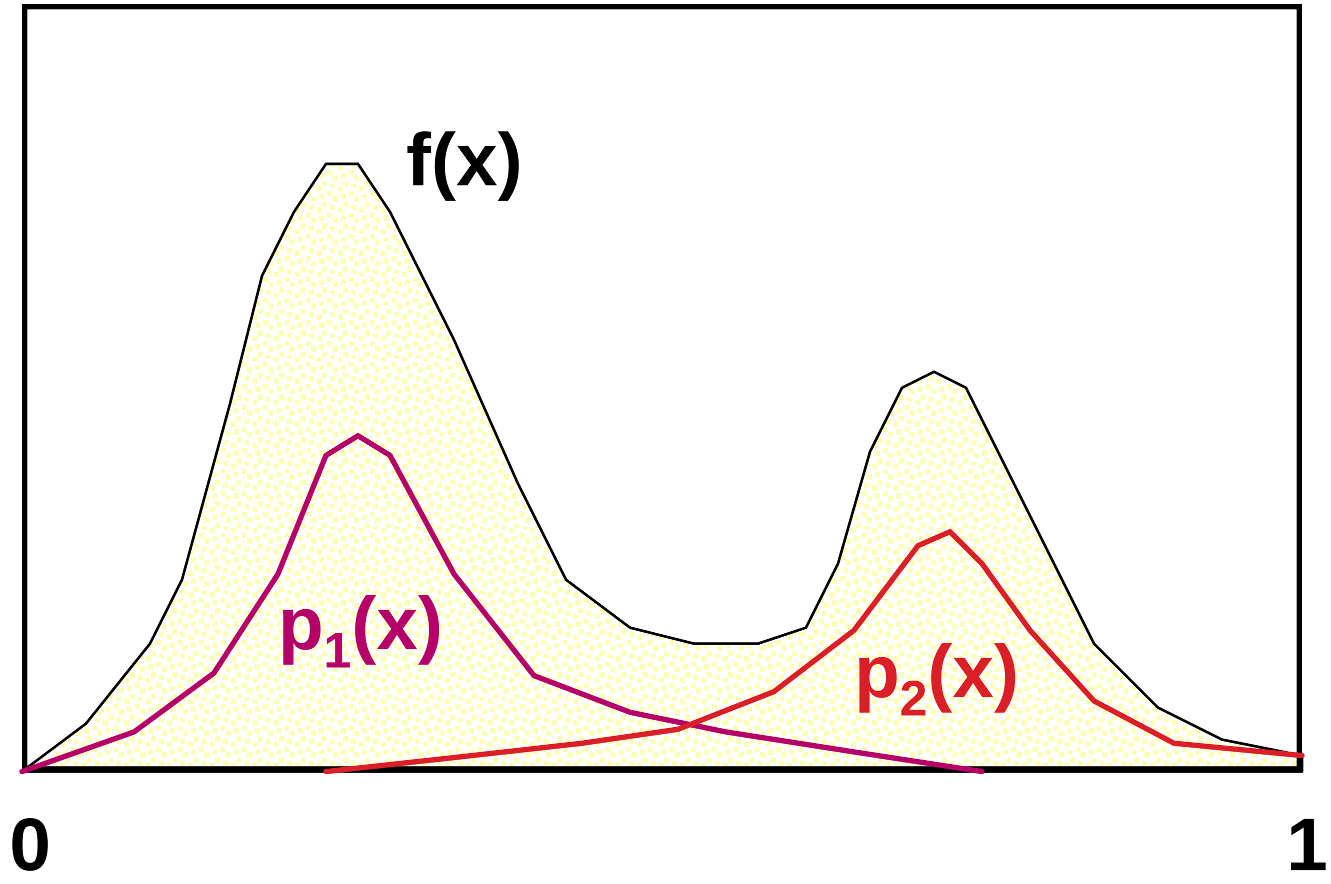
Ward BRDF, α=0.05

Ward BRDF, α=0.01

Zpět k obecnému MC integrování – „Multiple Importance Sampling“

Multiple Importance Sampling

(Veach & Guibas, 95)



Multiple importance sampling

- Máme dáno *n* vzorkovacích „technik“ (hustot pravděpodobnosti) $p_1(x), .., p_n(x)$
- Z každé techniky (hustoty) vybereme n_i vzorků $X_{i,1}, .., X_{i,n_i}$

- **Kombinovaný estimátor**

kombinační váhy
(mohou být různé pro každý vzorek)

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} w_i(X_{i,j}) \frac{f(X_{i,j})}{p_i(X_{i,j})}}$$

vzorkovací techniky

vzorky z jednotlivých technik

Nestrannost kombinovaného odhadu

$$E[F] = \ldots = \int \left[\sum_{i=1}^{n} w_i(x) \right] f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int f(x)$$

- Podmínka pro váhové funkce

$$\boxed{\forall x: \quad \sum_{i=1}^{n} w_i(x) = 1}$$

Volba váhových funkcí

- **Cíl:** minimalizovat rozptyl kombinovaného estimátoru

1. Aritmetický průměr (velmi špatná kombinace)

$$w_i(x) = \frac{1}{n}$$

2. Vyrovnaná heuristika (velmi dobrá kombinace)
   - ....

Vyrovnaná heuristika (Balance heurist.)

- Kombinační váhy

$$\hat{w}_i(\mathbf{x}) = \frac{n_i p_i(\mathbf{x})}{\sum_k n_k p_k(\mathbf{x})}$$

- Výsledný estimátor (po dosazení vah)

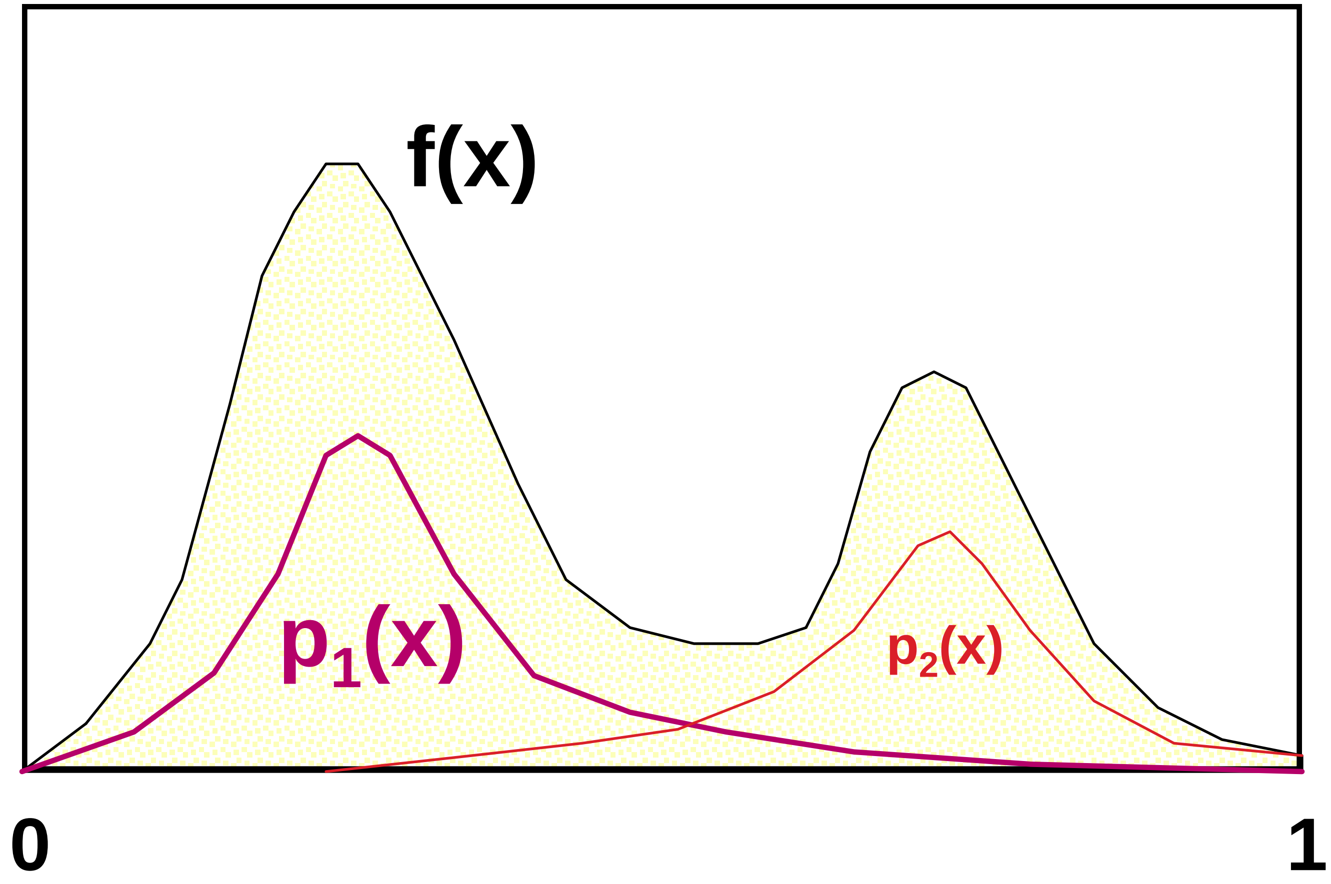
$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f(X_{i,j})}{\sum_k n_k p_k(X_{i,j})},}$$

  - příspěvek vzorku nezávisí na tom, ze které byl pořízen techniky (tj. pdf)

Vyrovnaná heuristika (Balance heurist.)

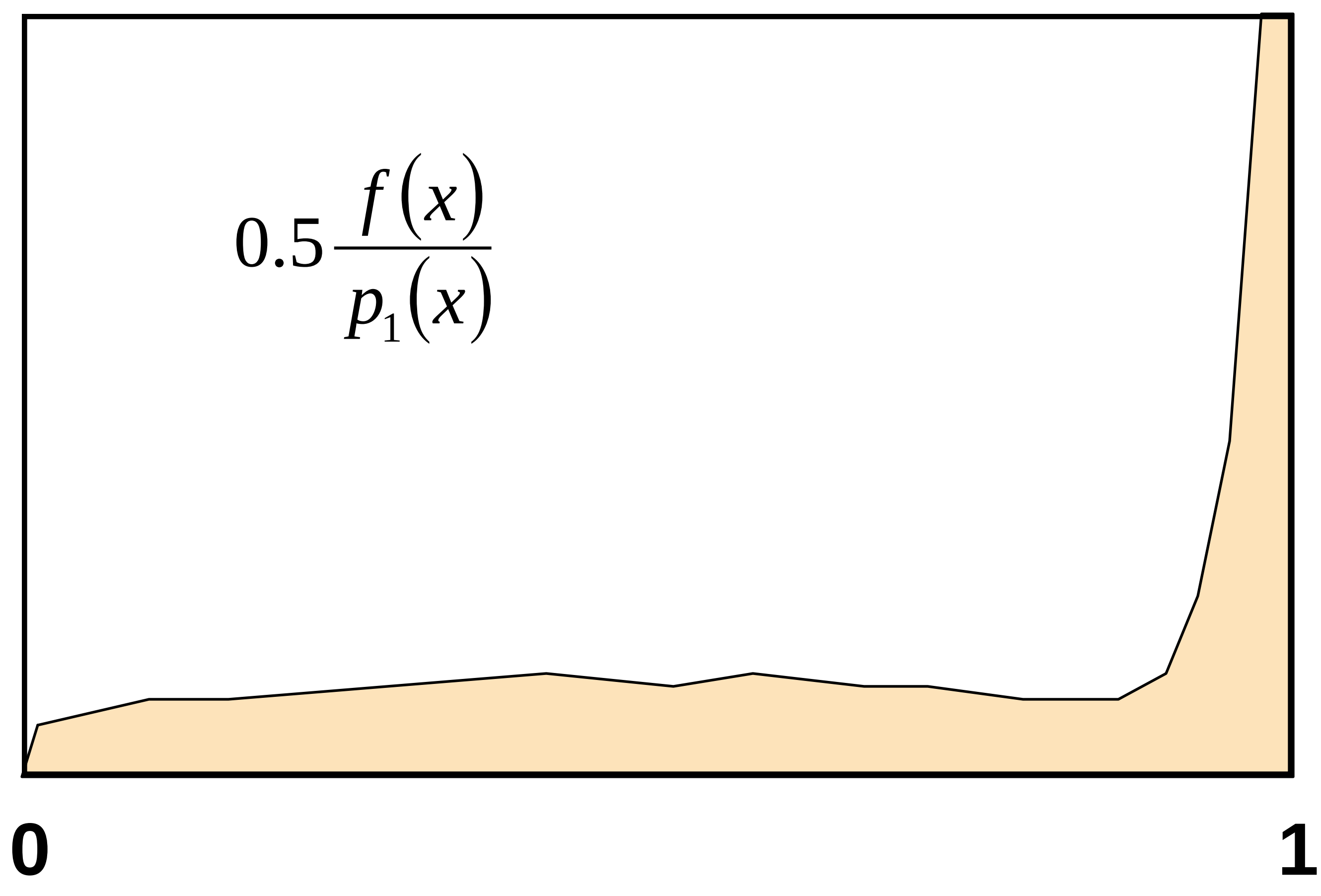
- Vyrovnaná heuristika je téměř optimální
  - Žádný kombinovaný estimátor nemůže mít rozptyl „o mnoho“ menší než vyrovnaná heuristika
- Další možné kombinační heuristiky
  - Maximální heuristika
  - Mocninná heuristika
  - viz. Veach 1997

Jeden člen kombinovaného odhadu

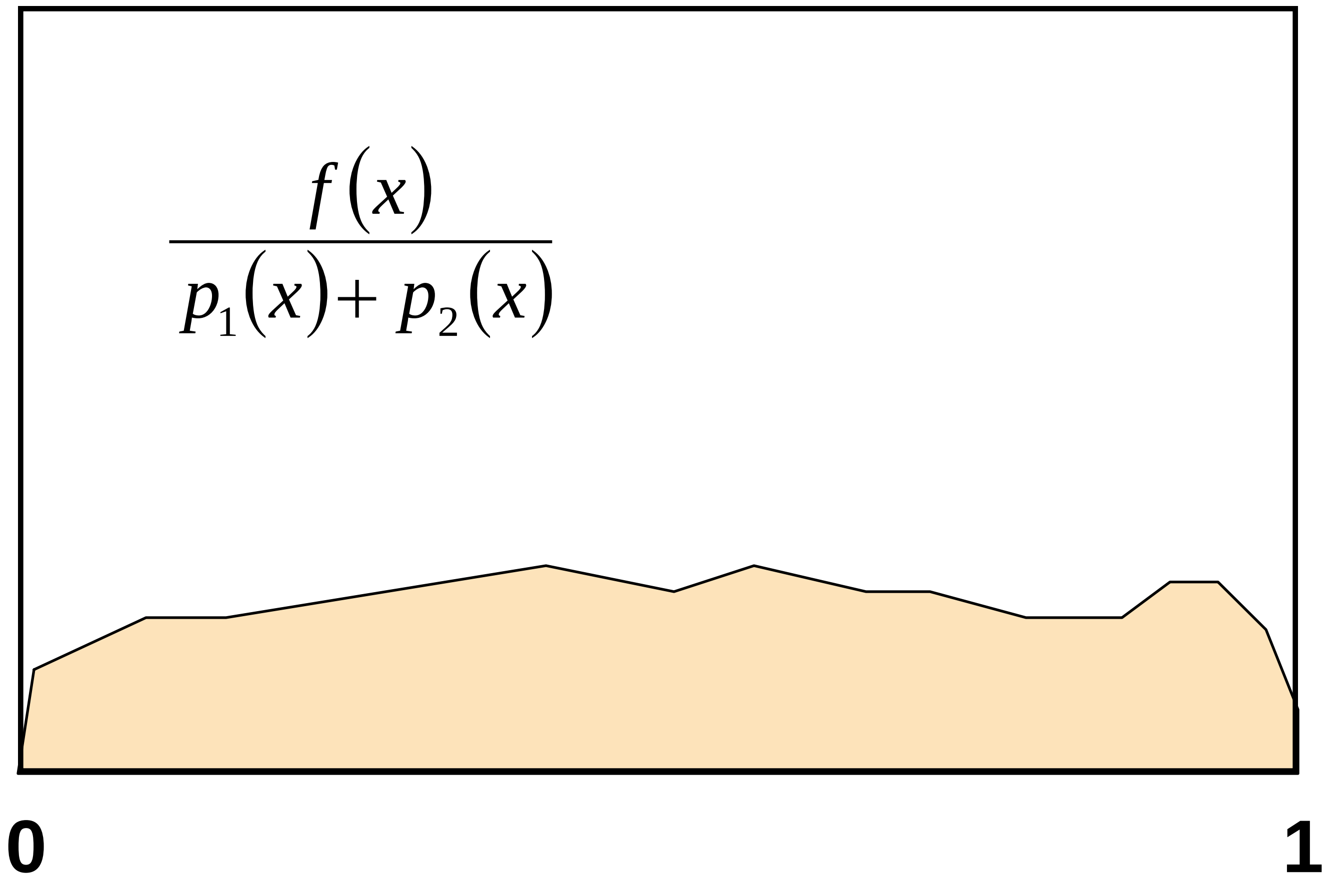


Aritmetický průměr

$$0.5\frac{f(x)}{p_1(x)}+0.5\frac{f(x)}{p_2(x)}$$



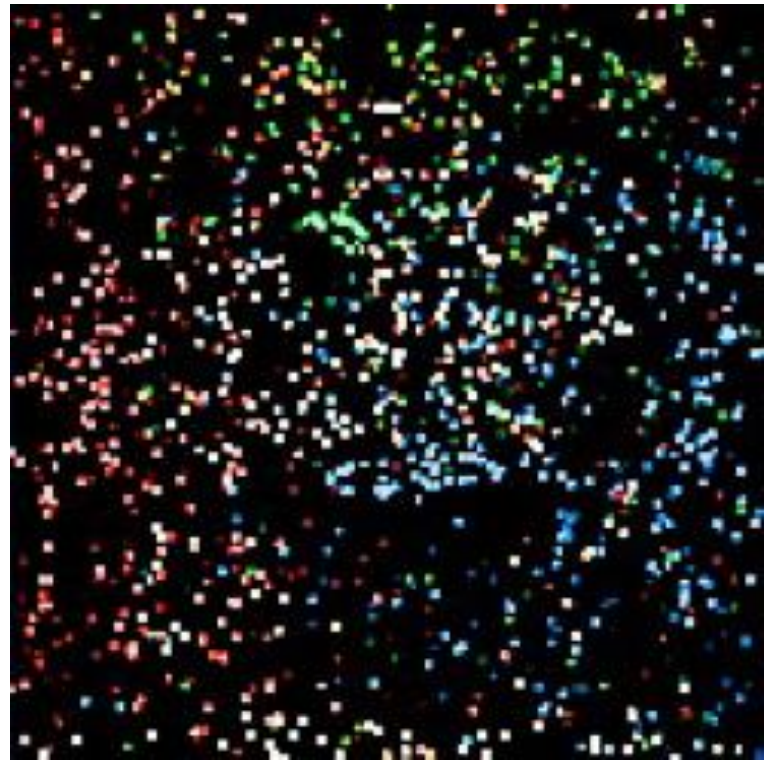
Vyrovnaná heuristika



Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

Problém: Najde path tracer světlo?

reference



simple path tracer
(150 cest na pixel)

Images: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení

- Zapomeňme na chvíli na path tracing
- Řešíme jednodušší problém:

  přímé osvětlení z daného zdroje světla

  tj. odražená radiance z bodu **x** způsobená osvětlením ze zdroje světla

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

1. **Vzorkování BRDF**
2. **Vzorkování plochy světel**

Dvě vzorkovací techniky

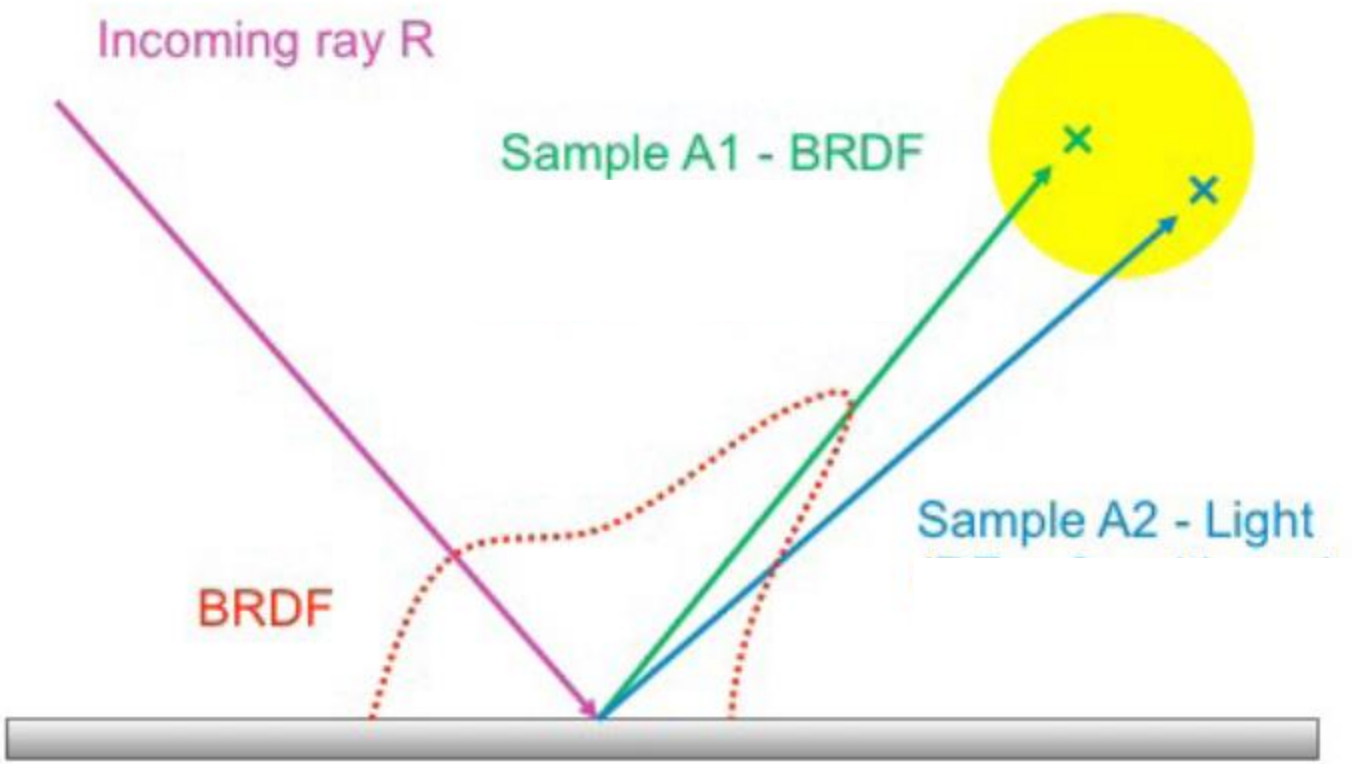


Image: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení: Vzorkování BRDF

- **Formulace integrálu** (integrování přes hemisféru nad **x**)

$$L_{\mathrm{r}}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{o}}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_{\mathrm{e}}(\mathrm{r}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i}}),-\omega_{\mathrm{i}})\cdot f_r(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i}}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot\cos\theta_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\omega_{\mathrm{i}}$$

- **MC estimátor**
  - Generujeme náhodný směr $\omega_{\mathrm{i},k}$ podle hustoty p
  - Vrhneme paprsek z **x** ve směru $\omega_{\mathrm{i},k}$
  - Pokud protne nějaký zdroj světla, přičteme $L_{\mathrm{e}}(.)\, f_r(.)$ cos/pdf

$$\hat{L}_{\mathrm{r}}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{o}}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{L_{\mathrm{e}}(\mathrm{r}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i},k}),-\omega_{\mathrm{i},k})\cdot f_r(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i},k}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot\cos\theta_{\mathrm{i},k}}{p(\omega_{\mathrm{i},k})}$$

Přímé osvětlení: Vzorkování povrchu zdrojů světla

- **Formulace integrálu** (integrování přes plochu zdroje)

$$L_\mathrm{r}(\mathbf{x},\omega_\mathrm{o}) = \int_A L_\mathrm{e}(\mathbf{y}\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}\to\mathbf{x}\to\omega_\mathrm{o})\cdot V(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\,\mathrm{d}A_\mathbf{y}$$

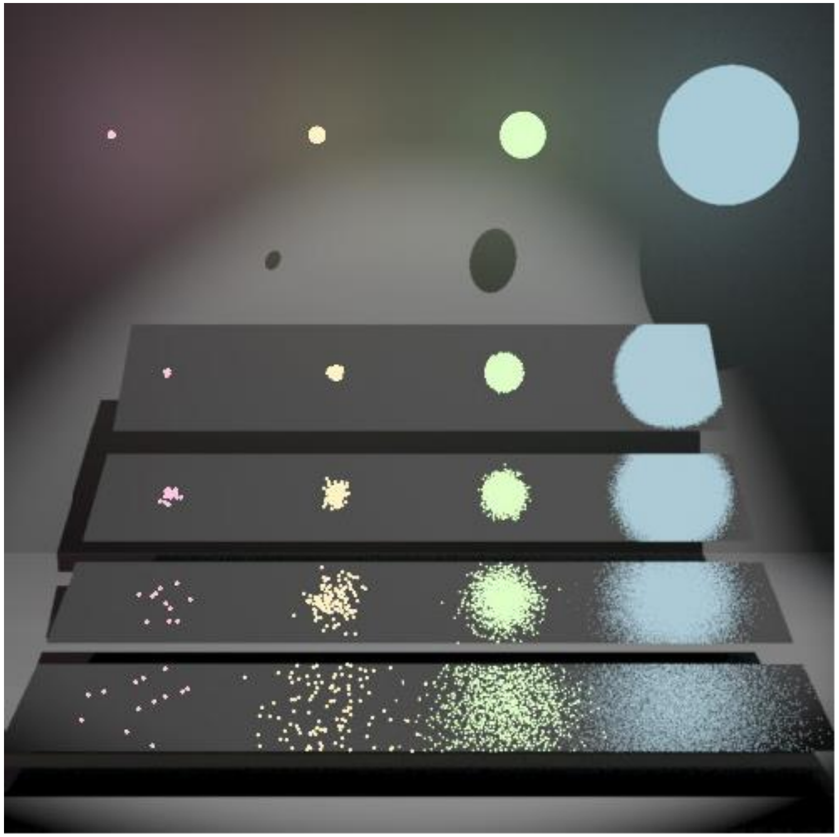
- **MC estimátor**
  - Generujeme náhodnou pozici $\mathbf{y}_k$ na zdroji
  - Testujeme viditelnost mezi **x** a **y**
  - Pokud V(x,y)=1, přičteme |A| $L_\mathrm{e}(\mathbf{y})\, f_r(.)$ cos/pdf

$$\hat{L}_\mathrm{r}(\mathbf{x},\omega_\mathrm{o}) = \frac{|A|}{N}\sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{e}(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x}\to\omega_\mathrm{o})\cdot V(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})$$

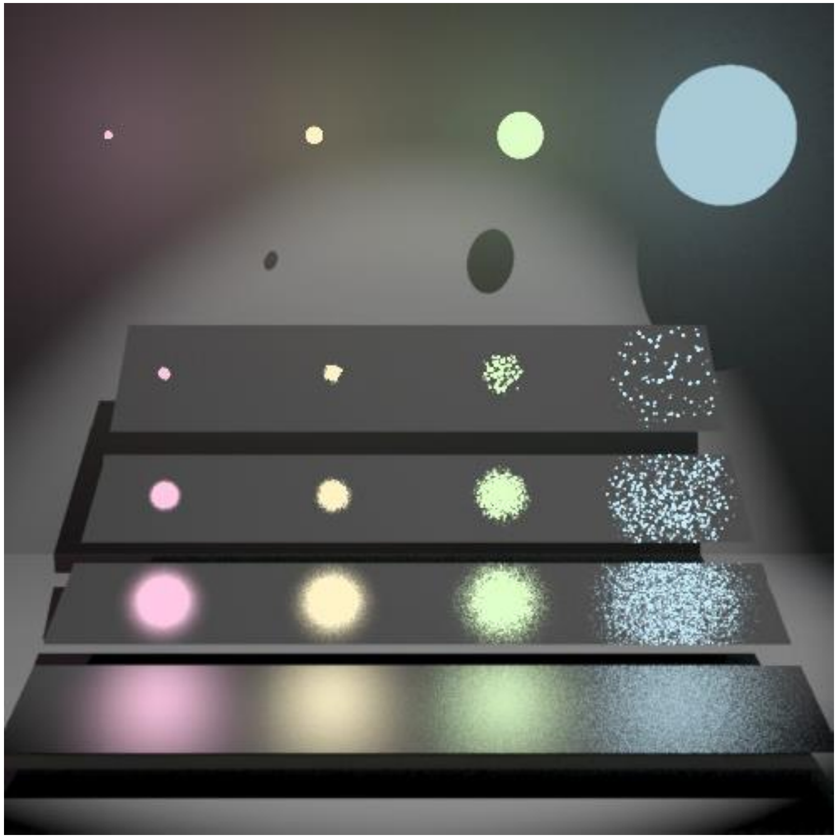
Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- **Vzorkování BRDF**
  - Výhodnější pro velké zdroje světla
  - Pro malé zdroje světla je pravděpodobnost zásahu zdroje velmi malá -> vysoký rozptyl, šum
- **Vzorkování světel**
  - Výhodnější pro malé zdroje
  - Jediná možná alternativa pro bodové zdroje
  - Pro velké zdroje mnoho vzorků mimo lalok BRDF -> vysoký rozptyl, šum

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy



Vzorkování BRDF



Vzorkování světel

Images: Eric Veach

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- Kterou techniku zvolit?
  - **OBĚ**
- **Problém**
  - Obě techniky odhadují stejnou veličinu $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$
    - Pouhým sečtením bychom dostali odhad 2 $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$ - špatně
  - Potřebuji vážený průměr příspěvků obou technik
  - **Jak zvolit váhy**?

Jak zvolit váhy?

- **Multiple importance sampling** (Veach & Guibas, 95)
- Váhy závislé na pdf vzorků
- Minimalizuje rozptyl kombinovaného estimátoru
- Téměř optimální řešení

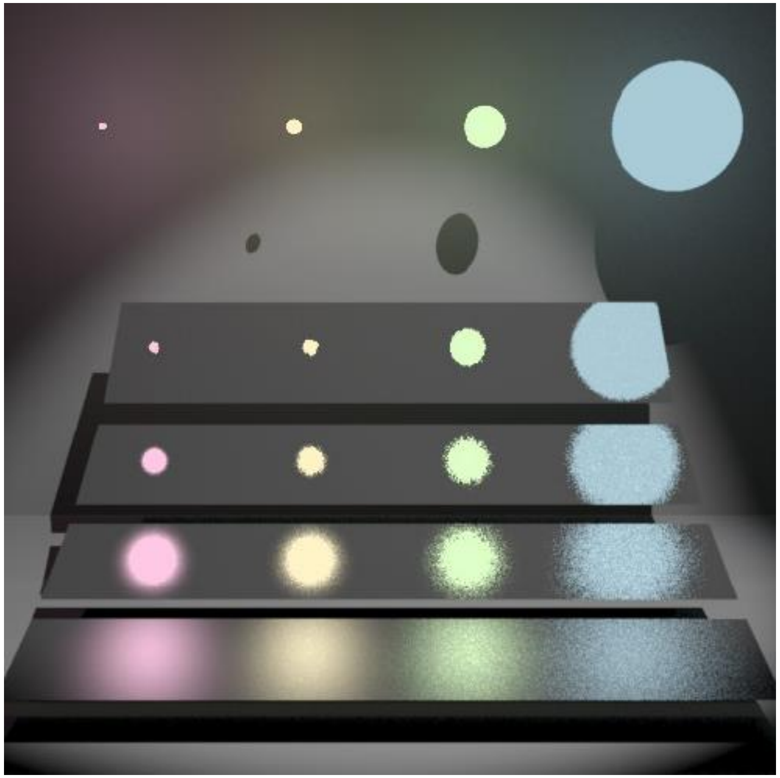


Image: Eric Veach

Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

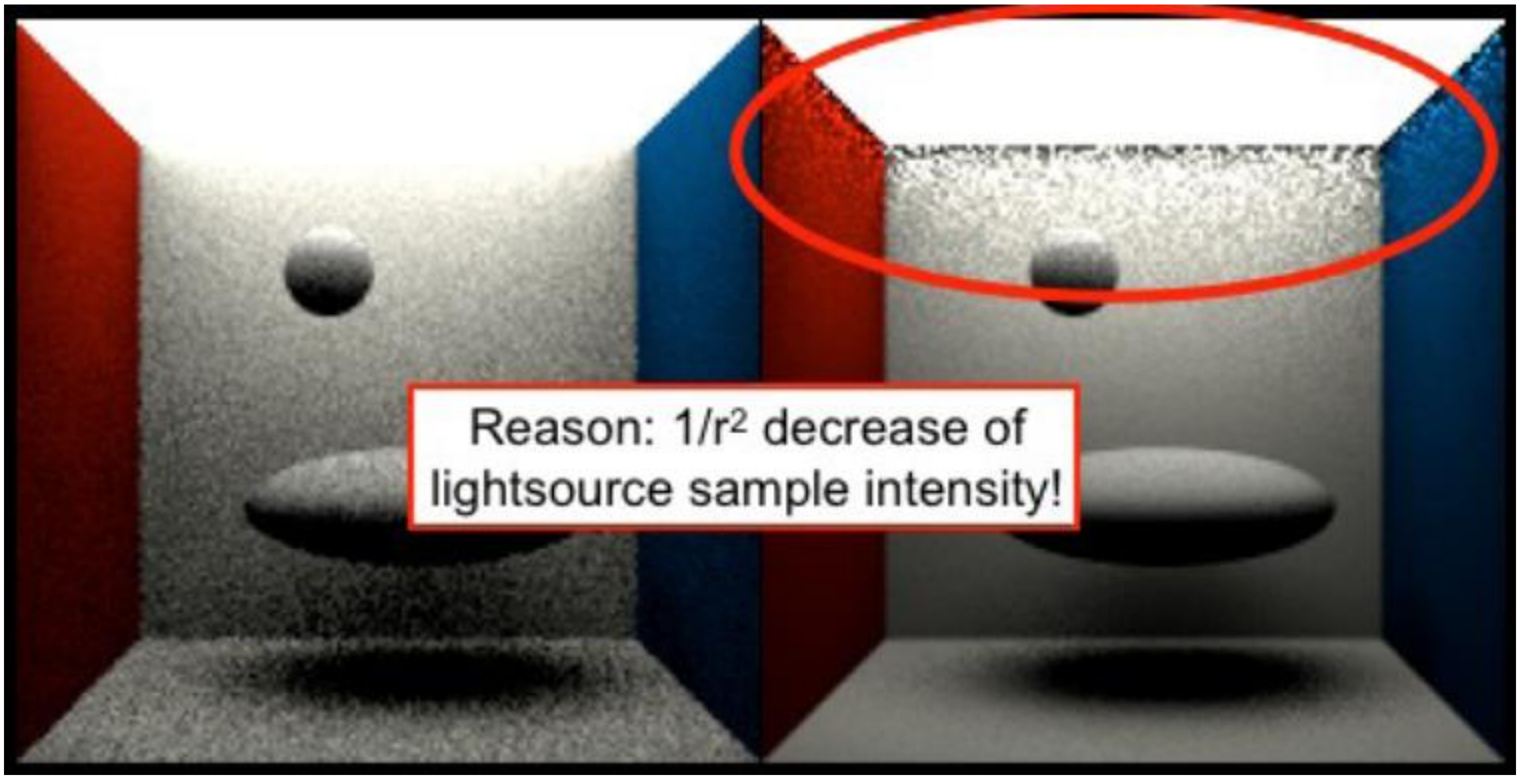
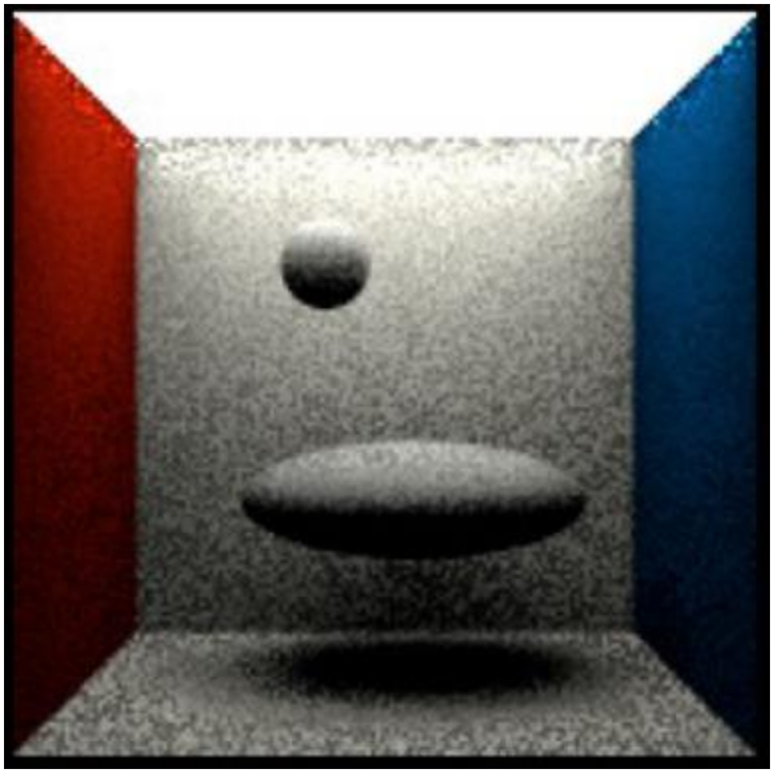


Image: Alexander Wilkie

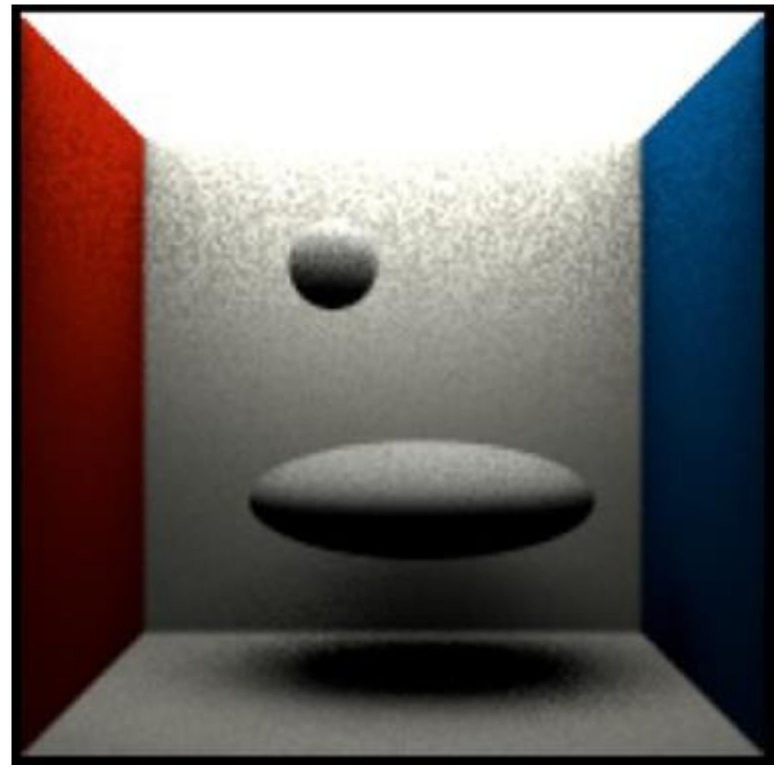
Vzorkovací technika (pdf) p_1: Vzorkování BRDF

Vzorkovací technika (pdf) p_2: Vzorkování plochy světla

Kombinace



Aritmetický průměr
Zachovává špatné vlastnosti
obou technik



Vyrovnaná heuristika
Bingo!!!

Image: Alexander Wilkie

Dvě vzorkovací techniky

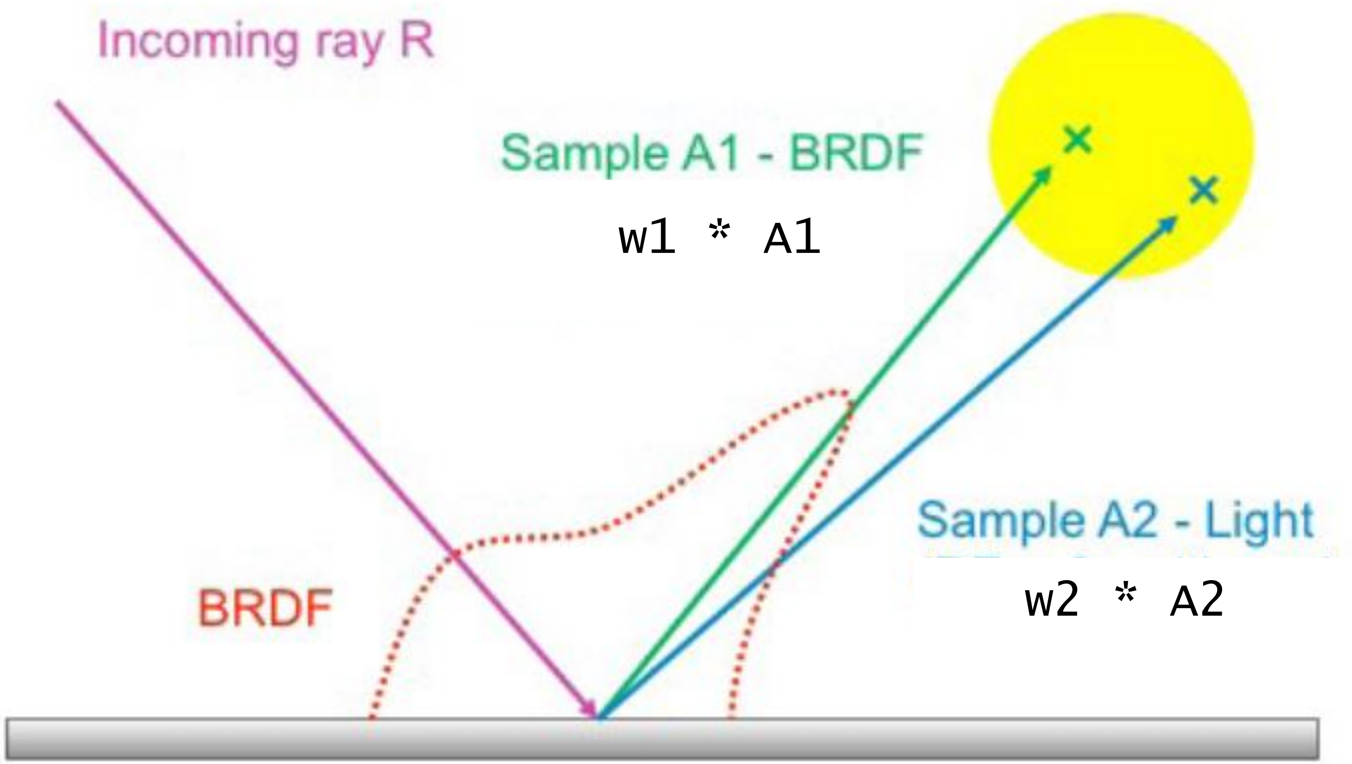


Image: Alexander Wilkie

Výpočet vah

Váha vzorku z BRDF vzorkování

$$w_1(\omega_j) = \frac{p_1(\omega_j)}{p_1(\omega_j) + p_2(\omega_j)}$$

Hustota pravděpodobnosti vzorkování z BRDF

Hustota, s jakou by byl směr ω_j vygenerován, kdybychom byli použili vzorkování plochy zdroje

Hustoty pravděpodobnosti

- **Vzorkování BRDF: $p_1(\omega)$**
  - Závisí na BRDF, např. pro Lambertovskou BRDF

$$p_1(\omega) = \frac{\cos\theta_{\mathbf{x}}}{\pi}$$

- **Vzorkování plochy zdroje: $p_2(\omega)$**

$$p_2(\omega) = \frac{1}{|A|} \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2}{\underline{\cos\theta_{\mathbf{y}}}}$$

Převedení hustoty 1/|A| z plošné míry (dA) do míry prostorového úhlu (dω)

Příspěvky vzorkovacích technik

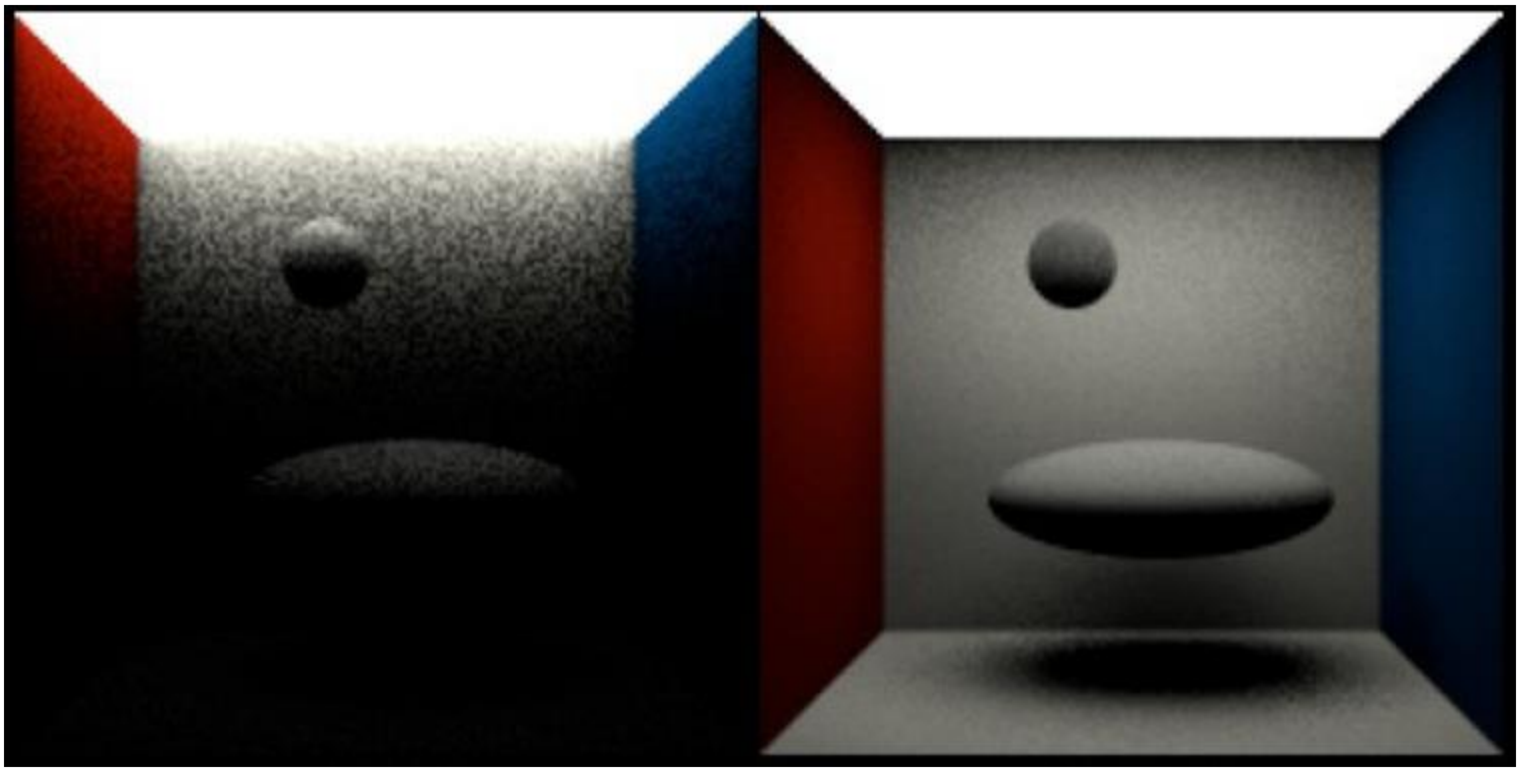


Image: Alexander Wilkie

w1 * vzorkování BRDF **w2 * vzorkování zdroje**